FLUCTUATION RESULTS IN FIRST-PASSAGE PERCOLATION (Probability Symposium)

AUTHOR(S):
中島, 秀太

数理解析研究所講究録 第2116巻 2019年 144-146

FLUCTUATION RESULTS IN FIRST-PASSAGE PERCOLATION

京都大学・数理解析研究所 中島秀太
Shuta Nakajima
Research Institute in Mathematical Sciences, Kyoto University

Abstract. 本稿では, 2018 年 12 月 17 日から 20 日に行われた研究集会 「確率論シンポジウム」における講演内容をもとに, First-pssage percolation における Shape の揺らぎの発散性について, 概要を述べる.

1. Introduction

First-passage percolation は Hammersley と Welsh により 1965 年に導入された動的な浸透モデルである. モデルは次のように定義される. 隣接している $\mathbb{Z}^d$ の二点をつなぐ辺の全体を $E(\mathbb{Z}^d)$ で表す. 各辺 $e \in E(\mathbb{Z}^d)$ には, その辺を通過するのに必要な時間を表す独立で同一分布に従う非負確率変数 τ_e が与えられているとする. また, $\mathbb{Z}^d$ の辺を $e_1 \to \cdots \to e_k$ の順にたどる路 π の移動時間を $t(\pi) = \sum_{i=1}^k \tau_{e_i}$ で定義する. さらに二点 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ 間の最小移動時間を次で定義する:

$$T(x,y) := \inf\{t(\pi): \ \pi \text{は } x \text{ から } y \text{ への路}\}.$$

物理的には τ_e は e の浸透に要する時間, $T(0,x)$ は液体の浸透領域が x に到達するまでの時間, $B(t) = \{x \in \mathbb{R}^d | T(0,[x]) \le t\}$ は時刻 t での浸透領域を表す.

Kingman の劣加法エルゴード定理より, $\mathbb{E}\tau_e < \infty$ であれば, 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ について, ある $g(x) \ge 0$ が存在し, 次が成り立つ:

$$g(x) = \lim_{t\to\infty} t^{-1}T(0,tx) = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\mathbb{E}[T(0,tx)] \quad a.s. \tag{1.1}$$

この $g(x)$ は time constant と呼ばれ, $\mathbb{P}(\tau_e = 0) < p_c(d)$ であれば $\mathbb{B}_d = \{x \in \mathbb{R}^d | \ g(x) \le 1\}$ が compact となることが知られている [6].

2. 背景と先行研究

Cox と Durrett は 1981 年に次の Shape 定理を示した: $\mathbb{P}(\tau_e = 0) < p_c(d)$ と $\mathbb{E}\tau_e < \infty$ を仮定する. この時任意の $\epsilon > 0$ について,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(t(1-\epsilon)\mathbb{B}_d \subset B(t) \subset t(1+\epsilon)\mathbb{B}_d)\right) = 1. \tag{2.1}$$

上記の結果は Shape $B(t)$ に対する大数の法則に対応する. したがって, 中心極限定理に対応して, 収束の速さ (shape 揺らぎ) を考えることが自然な問題となる. そこで次のようにして揺らぎの大きさを定義する.

Definition 1. 与えられた $l > 0$ と原点を含む集合 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ について,

$$\Gamma_l^- = \{v \in \Gamma | \ d(v,\Gamma^c) \ge l\} \ and \ \Gamma_l^+ = \{v \in \mathbb{R}^d | \ d(v,\Gamma) \le l\}$$

と置く. ここで d はユークリッド距離である. 与えられた集合 $A, B \subset \mathbb{R}^d$ について, B に対する A の揺らぎを次で定義する*:*

$$F(A,B) = \inf\{\delta > 0 | \ B_\delta^- \subset A \subset B_\delta^+\}.$$

Date: February 6, 2019.
2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60K37; secondary 60K35; 82A51; 82D30.
Key words and phrases. random environment, first passage percolation.

$A = B(t), B = t\mathbb{B}_d$ である時, $F(B(t), t\mathbb{B}_d)$ は単に shape 揺らぎと呼ばれる.

Kesten [7] と Alexander [1] の結果により, shape 揺らぎはすべての次元で $O((t\log t)^{1/2})$ であることが知られている. 一方下からの評価として Zhang は分布が Bernoulli に従うとき, shape 揺らぎが三次元以上の任意の次元で発散することを示した [9]. より正確には次が成り立つ: 任意の $c > 0$ についてある $C > 0$ が存在し,

$$\mathbb{P}(F(B(t), \mathbb{B}_d) \le c\log t) \le Ct^{-d+2-2c\log p}, \tag{2.2}$$

ここで $p = \mathbb{P}(\tau_e = 0) = 1 - \mathbb{P}(\tau_e = 1)$ と置いた. 一方でこの証明は Russo の公式を使っているため, 一般の分布への拡張は非自明な問題である. 本稿では van den Berg と Kesten [3] により導入されたリサンプル法を帰納的に用いることによりこの部分を解決した. 結果として, 分布の一般化だけでなくより強い評価を得ることができた.

3. 主結果

主結果を述べる前に次のような分布の制限を考える.

Definition 2. 次を満たす時, τ の分布が適切であると言う*:*

$$\mathbb{P}(\tau_e = \underline{\tau}) < \begin{cases} p_c(d) & \textit{if } \underline{\tau} = 0, \\ \vec{p}_c(d) & \textit{otherwise}, \end{cases}$$

ここで $\underline{\tau}$ *は* τ_e *の分布の support の下限,* $p_c(d), \vec{p}_c(d)$ *はそれぞれ* d *次元 percolation モデル,* d *次元 oriented percolation モデルの臨界確率である.*

もし τ_e の分布が連続 (i.e., $\mathbb{P}(\tau_e = a) = 0$ for any $a \in \mathbb{R}$) ならば適切である.

Theorem 1. *τ の分布が適切で, ある $m > 0$ について $\mathbb{E}[\tau_e^{2m}] < \infty$ と仮定する. この時, ある $c, C > 0$ が存在し任意の $t > 0$ について,*

$$\mathbb{P}(F(B(t), \mathbb{B}_d) \le c\log t) \le Ct^{-2dm}..$$

3.1. 証明の概略.

証明の概略を述べる. 簡単のため $\mathbb{P}(\tau_e = 0) > 0$ を仮定する.

まず $(t - c\log t)\mathbb{B}_d$ から $((t + c\log t)\mathbb{B}_d)^c$ への路 $(\gamma_i)_{i=1}^{[t^{1/2}]}$ を $[t^{1/2}]$ 個とる ((see Figure 1)). ここでそれぞれの路の長さ $l_i \in \mathbb{N}$ は $2cd\log t$ 以下とする. $\gamma_i = (\gamma_i[j])_{j=1}^{l_i}$ と書く. 次の event を A_i と書く:

$$A_i = \{T(0, \gamma_j[l_j]) > t \text{ for any } j \neq i \text{ and } T(0, \gamma_i[l_i]) \le t\}.$$

定義の仕方より, $A_i \cap A_j = \emptyset$ if $i \neq j$.

上で定義した γ_i を一つとる. イベント $\{F(B(t), t\mathbb{B}_d) \le c\log t\}$ の上で, $\{\tau_e\}_{e\in\gamma_i}$ をリサンプルし, 次のようなイベントを考える:

"to each edge $e \in \gamma_i$, $\tau_e = 0$ after resampling".

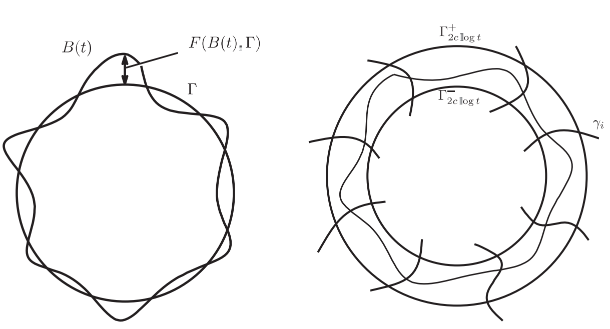

FIGURE 1
Schematic picture of the shape fluctuation.

もし γ_j たちが互いに十分離れていれば, このリサンプルは $(T(0,\gamma_j[l_j]))_{j\neq i}$ を変化させない. 従って, A_i が (高確率で) 成り立つことが示せる. 従って, 次を得る:

$$\mathbb{P}(A_i) \geq \mathbb{P}(\tau_e = 0)^{\sharp\gamma_i}\mathbb{P}(F(B(t), t\mathbb{B}_d) \leq c\log t).$$

A_i 達は交わりを持たず, $\sharp\gamma_i \leq 2cd\log t$ であるので,

$$1 \geq \sum_{i=1}^{[t^{1/2}]} \mathbb{P}(A_i) \geq t^{1/2}\mathbb{P}(\tau_e = 0)^{2cd\log t}\mathbb{P}(F(B(t), t\mathbb{B}_d) \leq c\log t).$$

ここで十分小さい $c > 0$ について,

$$t^{1/2}\mathbb{P}(\tau_e = 0)^{2cd\log t} \to \infty,$$

であるので,

$$\mathbb{P}(F(B(t), t\mathbb{B}_d) \leq c\log t) \to 0 \text{ as } t \to \infty.$$

定理の評価を得るためには, これらの操作を帰納的に続ける.

References

[1] Kenneth S. Alexander. Approximation of subadditive functions and convergence rates in limiting-shape results. *Ann. Probab.* 25, 30–55, 1997
[2] A. Auffinger, J. Hanson, and M. Damron. 50 years of first passage percolation, 2015. ArXiv e-print 1511.03262.
[3] J. van den Berg and H. Kesten. Inequalities for the time constant in first-passage percolation. *Annals Applied Probability*, 56-80, 1993
[4] J. Cox and R. Durrett. Some Limit Theorems for Percolation Processes with Necessary and Sufficient Conditions. *Ann. Probab.* 9, 583–603, 1981
[5] J. F. C. Kingman. The ergodic theory of sub additive stochastic processes. *J. Roy. Statist. Soc. Ser.* 30, 499–510, 1968.
[6] Harry Kesten. Aspects of first passage percolation. In Lecture Notes in Mathematics. vol. 1180, 125–264, 1986.
[7] Harry Kesten. On the speed of convergence in first-passage percolation. *Ann. Appl. Probab.* 3, 296-338, 1993.
[8] Shuta Nakajima Divergence of shape fluctuation for general distributions in first passage percolation arXiv:1706.0349
[9] Yu Zhang. The divergence of fluctuations for shape in first passage percolation. *Probab. Theory. Related. Fields.* 136(2), 298–320, 2006.

(Shuta Nakajima) Research Institute in Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto, Japan
Email address: njima@kurims.kyoto-u.ac.jp